Serie 8

1. Beispiele

a) Geben Sie ein Beispiel einer fallenden Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nichtleeren zusammenhängenden abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ an so, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nicht leer und nicht zusammenhängend ist.

b) Finden Sie ein Beispiel eines normalen Raumes, welcher nicht Hausdorff ist.

c) Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raumes an, der eine kompakte Teilmenge besitzt welche nicht abgeschlossen ist.

2. Lokal kompakte Hausdorffräume

Wenn $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist, dann heisst eine Teilmenge $N \subset E$ *Umgebung* von $x \in E$, wenn $x \in N^o$. Eine Teilmenge $V \subset E$ heisst *präkompakt* wenn $\overline{V}$ kompakt ist. Ein topologischer Raum heisst *lokal kompakt* wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Es sei $(E, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie:

a) Wenn $U \subset E$ offen ist, und $x \in U$, dann existiert eine kompakte Umgebung N von x so dass $N \subset U$.

b) Wenn $K \subset U \subset E$ wobei K kompakt und U offen ist, dann existiert eine präkompakte offene Menge V so dass $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

3. Einpunktkompaktifizierung

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und ∞ bezeichne einen Punkt der nicht Element von E ist. Setze $E^* := E \cup \{\infty\}$ und

$$\mathcal{T}^* := \mathcal{T} \cup \{U \subset E^* \mid \infty \in U \text{ und } U^c \text{ ist kompakt in } (E, \mathcal{T})\}.$$

Zeigen Sie:

a) $(E^*, \mathcal{T}^*)$ ist ein kompakter topologischer Raum mit $(\mathcal{T}^*)_E = \mathcal{T}$.

b) $(E^*, \mathcal{T}^*)$ ist Hausdorff $\Leftrightarrow$ $(E, \mathcal{T})$ ist lokal kompakt.

c) E ist dicht in $(E^*, \mathcal{T}^*)$ $\Leftrightarrow$ $(E, \mathcal{T})$ ist nicht kompakt.

d) Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist homöomorh zu S^n.

Der Raum $(E^*, \mathcal{T}^*)$ heisst die *Einpunktkompaktifizierung* oder *Alexandroff Kompaktifizierung* von $(E, \mathcal{T})$.